Mathématiques		*Devoir de contrôle n°1*	
Lycée Pilote Monastir			
$4^{ème}$ sc_2	Mercredi 14-11-2011	Durée : 2 heure	*Prof : Yacoubi Hamda*

Exercice 1 (3points)

Donner la réponse exacte (aucune justification n'est demandée)

1) Si z a pour argument $\frac{2\pi}{3}$ alors un argument de $i\,\overline{z}^2$ est

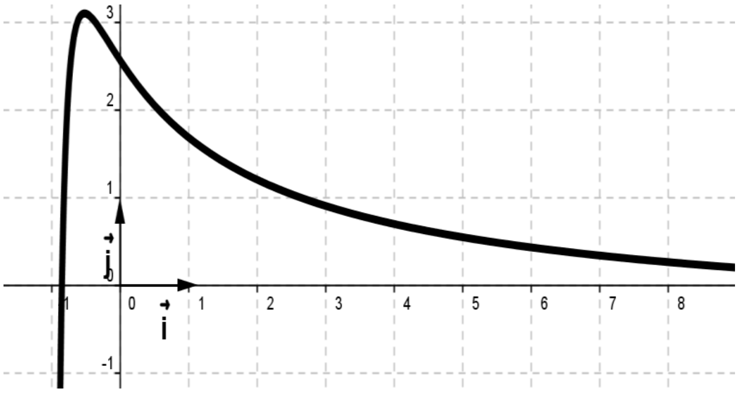
a) $\frac{7\pi}{6}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $-\frac{4\pi}{3}$

2)Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 2}{u_n + 3} \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

Si u converge vers un réel ℓ alors les valeurs possibles de ℓ sont

a) $\left\{-1;\frac{2}{3}\right\}$ b) $\left\{4;\frac{2}{3}\right\}$ c) $\{-1;2\}$

3) Soit f une fonction continue sur $]-1;+\infty[$ dont la courbe est la suivante



Sachant que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ alors

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(\sqrt{1-x}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x f\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 0$

Exercice 2(4,5points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ .Soit z un nombre complexe non nul

1)Montrer que $\frac{2z-1}{z^2}$ est un réel si est seulement si $\overline{z} = z$ ou $|z|^2 = R_e(z)$

2)En déduire l'ensemble E des point M d'affixe z tel que $\frac{2z-1}{z^2}$ est réel.

3) pour $z \neq 0$ on pose $z' = \frac{i\overline{z}+1}{\overline{z}}$ et on note M, M' et Ales points d'affixes respective z , z' et i

a)Verifier que $z' - i = \frac{1}{\overline{z}}$

b)Montrer que lorsque M varie sur le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$ alors M' décrit un cercle C' que l'on précisera.

c)Déduire de a) que les vecteurs $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires et de même sens
En déduire une construction de M' sachant M.

Exercice 3(4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$

Dans l'annexe (page 3) M représente le point d'affixe $z = 2e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

1)a)Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes $\frac{1}{z}$; $-\frac{1}{\bar{z}}$ et $\frac{z^2}{\bar{z}}$

b)Placer les points N, P et Q d'affixes respectives $\frac{1}{z}$; $-\frac{1}{\bar{z}}$ et $\frac{z^2}{\bar{z}}$

2)a)Déterminer la valeur de α pour laquelle les points O, N et Q sont alignés

b) Pour la valeur de α trouvée montrer que MNPQ est un trapèze isocèle.

Exercice4 (4,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$

1)a) Montrer que f est continue sur $]0;+\infty[$

b) f est elle prolongeable par continuité à droite en 0 ?

2)a)Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b)Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x)$, interpréter graphiquement ce résultat .

3)a)Montrer que f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$

b) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[1;+\infty[$

Vérifier que $\alpha \in]1;2[$

c)Montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) = \frac{\sqrt{2\alpha-1}}{\alpha}$

Exercice 5(4 points)

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \left(\frac{n+2}{2n+2}\right)u_n \quad ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a)Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n \leq 1$.

b)En déduire que la suite u est convergente et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2)on pose $v_n = \frac{u_n}{n+1}$; $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que (v) est une suite géométrique dont on précisera la raison q.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n}$

Annexe à rendre avec la copie

Nom……………………………..Prénom……………………………………….